高中数学研究性学习的实践与认识

结题报告

江苏省苏州第一中学校　　　蔡玉书名师工作室

苏州市田家炳实验高级中学 陈兆华名师工作室

高中数学研究性学习的实践与认识结题报告

课题组

执笔 蔡玉书 江苏省苏州第一中学校

2015 年 3 月我们申报了江苏省教育规划办课题《高中数学研究性学习的实践与认识》，2015 年 11 月获得批准，现在成为江苏省教育规划办重点自助课题. 之前同一课题曾经作为江苏省苏州第一中学校 11.5 课题《叶圣陶教育思想》子课题进行了多年的研究，所以这几年来我们围绕这个课题我们进行了一系列的工作，取得了一系列成果. 下面我就课题作结题报告.

1.课题研究的背景和意义

1. 1 课题研究的宏观背景

江苏省 2008 年开始实现新课程高考，新课程强调学生的自主学习和自主研究，反对灌输式的教学模式，研究性学习已经成为学校的必修课程.

传统的数学教学模式是以传授知识为目的，老师占主导型的教学模式，学生学到知识的多少与老师上课传授知识的多少有关，而且与老师本身的知识水平密切相关. 新课程要求改变传统的教学模式，提高课堂教学的有效性，以学生为主体，一种新的教学模式应运而生，这就是研究性教学. 它是高标准完成教学任务的一种教学模式，这种教学模式是在教师以课程内容和学生的已有知识为基础，引导学生创造性地应用知识，自主地发现问题、研究问题和解决问题，并在研究中积累知识、培养能力和锻炼思维的新型教学模式.

1. 2 研究性教学的特点

（1） 教学内容的开放性

传统的教学模式下，教学内容只局限于教材和教学参考书，老师按教参划分的课时进行教学，不注意各个章节之间的联系，不注重培养学生的自学能力和探究问题的能力，一般是满堂灌的教学模式，老师讲学生听，影响学生提出问题、分析问题和解决问题的能力，影响学生对知识的概括力和综合应用的能力，在研究性教学的过程中，学习内容不是封闭的，不局限于课本和教学参考书，鼓励学生以积极的态度学习数学知识，正确引导学生提出问题、分析问题和解决问题，提高他们对知识的概括力和综合应用的能力.

（2） 学习过程的研究性

传统的教学模式，教师讲，学生听，老师讲的吃力，学生听的枯燥，学生完全处于被动的接受状态，有的学生根本不动脑筋，只是将老师讲的记下来，不知道知识的来龙去脉，下课又不好好复习，效率十分低下，在研究性教学模式下，要求学生全身心的投入，老师只起引导作用，只是帮助学生提出问题、分析问题和解决问题. 长期在这种模式下学习，学生的探索问题的能力必定会得到显著提高，创新精神得到培养，学习会更加主动，对学习数学的积极性会空前高涨. 正如叶圣陶先生所讲教学的最高境界是“为了达到不需要教”.

2012 年 4 月 9 日苏州市在张家港市高级中学组织了大市范围内的公开教学和研讨活动，笔者有幸为全市的教师开设了一堂公开课. 在公开课上，我组织学生对一类指数函数型试题进行了深入细致的探求，收到了非常满意的效果. 这样的课让学生见识了数学知识的内在联系，欣赏了数学的简单美、和谐美，也使得全市高三教师受益匪浅.

（3） 强调学生的自主性

研究性教学要求重视教学的宽松环境，以人为本，注重人的潜能的发挥，强调学生良好个性的培养，教师要根据学生的学习目标、学习要求布置任务，使学生的学习潜能得到充分发挥，尊重、培养和发展学生的个性.

1. 3 研究性教学和学习的意义

研究性教学要求教师在备课上多下功夫，下苦工. 它可以节省学生大量时间，少走弯路. 让学生在课堂中学到很多课本想不到的知识，可以提高学生学习数学的积极性，培养学生学习数学数学的广泛兴趣，可以提高学生一题多解和一题多变的能力，提高学生的发散思维的能力，更能提高学生的应试能力.

开展此项课题研究的目的意义是：

1、丰富研究性学习课程资源，促进研究性学习课程的深入实施。充分利用、挖掘校内外高中数学新课程资源和研究性学习课程资源，开发出更多更好的研究性学习课程资源，解决高中数学研究性学习课程资源不足的问题。

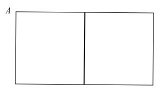
2、通过高中数学研究性学习课程资源开发利用的实践探索与理论研究，创新研究性学习课程资源利用的方法、模式，为课程资源开发利用提供可以借鉴的成功经验，为研究性学习课程实施提供理论和实践上的支持。

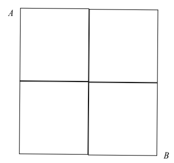
3、提高学生数学的学习能力、思维能力和解题能力。研究性学习课程资源合理、有效的开发，对于拓展研究性学习内容的选择范围、实现学习途径的多样化、营造开放的学习环境、改变学生被动的学习方式，提高学生自主、合作和探究学习的积极性，寻求中学生学习能力、实践能力和创新能力培养的新增长点。

4、提高教师对课程资源开发利用的能力和教学科研能力，促进教师的专业成长。研究性学习课程的深入推进，需要教师的专业发展和成长作为支撑，而研究性学习课程资源开发，就能促进教师的专业发展和成长。

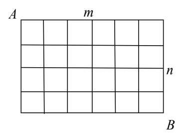
例如在教《解三角形》一章时，课本将正弦定理和余弦定理的教学完全隔离开来，这样不利于学生把握知识的本质，课后布置学生去研究正弦定理、余弦定理、射影定理三者之间的联系，让学生自己去研究，辅导课上让他们一一展示.

在教双曲线一节内容时，引导学生类比于椭圆自主探究双曲线标准方程的推导，几何性质以及一些重要结论：例如在椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$中， F_1，F_2是它的两个焦点，P 在椭圆上，$\angle F_1PF_2=\theta$，则$\triangle F_1PF_2$的面积为 $S=b^2\tan\frac{\theta}{2}$. 让学生探究双曲线的结论：在双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$中， F_1，F_2是它的两个焦点，P 在双曲线上，$\angle F_1PF_2=\theta$, 则$\triangle F_1PF_2$的面积为$S=b^2\cot\frac{\theta}{2}$. 并给出证明.





在教排列与组合时课本中有两道习题是研究下面从 A 到 B 的最短路线的方法数. 学生很快用枚举法找出从 A 到 B 的最短路径数，为了揭示问题的本质我们要求学生去探究当图形是 $m\times n$ 方格时从 A 到 B 的最短路线的方法数.

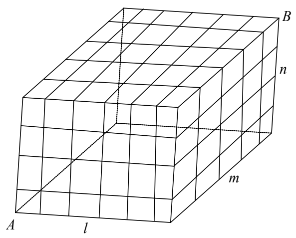


最后我们让学生考虑如下问题的解：

考虑长、宽、高分别为 l、m、n 的一个长方体，它由 lmn 个单位小立方体组成；

(1)该长方体内一共有多少个小长方体(包括立方体)；

(2)如果只能沿小立方体棱走，求从顶点 A 到顶点 B 的



(不同的)最短路线数目 S(可以通过给定长方体的内部).

《排列与组合》一章内，课本有一道习题，要求学生写出 a，b，c 三个元素的排列要求 a 不排在第一位，并且 b 不排在第二位，c 不排在第三位的所有排列，让学生板演后，要求学生讨论 a，b，c，d 四个元素的排列要求 a 不排在第一位，并且 b 不排在第二位，c 不排在第三位，d 不排在第四位的所有排列（此即 1993 年全国高考数学试题的变式)，进一步要求学生考虑历史名题伯努利“装错信封问题”，这个问题是由当时最有名的数学家约翰·伯努利(Johann Bernoulli，1667－1748)的儿子丹尼尔·伯努利(Danid Bernoulli，1700－1782)提出来的，n 个人写了 n 封不同的信及相应的 n 个不同的信封，他把这 n 封信都装错了信封，问都装错信封的装法有多少种？ 当然这个问题抛给学生时，交代学生在学完排列与组合一章后再去完成，当然这些课题应该给平时喜爱数学的学生去完成，并不强求每个学生都要完成.

在讲解二项发布时课本对发布的数学期望及方差公式直接给出，并没有证明，鉴于它的重要性，在课堂上我们直接和同学们一起探究公式的证明过程，使学生学到了处理组合恒等式的一些常用技巧.

首先由二项分布的定义，我们得到 $P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k}(k=0,1,2,\cdots,n)$，其中 $0<p<1$，$p+q=1$，由数学期望的意义得 $E(X)=\sum\limits_{k=0}^{n}kC_n^k p^k q^{n-k}=\sum\limits_{k=1}^{n}kC_n^k p^k q^{n-k}$，这时引导学生证明 $kC_n^k=nC_{n-1}^{k-1}(k=1,2,\cdots,n)$，所以 $E(X)=np\sum\limits_{k=1}^{n}C_{n-1}^{k-1}p^{k-1}q^{n-k}=np\sum\limits_{k=0}^{n}C_{n-1}^{k}p^k q^{n-1-k}=np(q+p)^{n-1}=np$.

记 $\mu=E(X)$，由方差的定义 $V(X)=\sum\limits_{k=1}^{n}p_i(x_i-\mu)^2$，首先我们和学生们一起将公式化为等价式 $V(X)=\sum\limits_{k=1}^{n}p_k x_k^2-\mu^2$，事实上，由于 $\sum\limits_{k=1}^{n}p_k=1$，$\mu=E(X)=\sum\limits_{k=1}^{n}p_k x_k$，所以

$$V(X)=\sum_{k=1}^{n}p_k x_k^2-2\mu\sum_{k=1}^{n}p_k x_k+\mu^2\sum_{k=1}^{n}p_k=\sum_{k=1}^{n}p_k x_k^2-2\mu^2+\mu^2=\sum_{k=1}^{n}p_k x_k^2-\mu^2.$$

对于二项分布的方差

$$V(X)=\sum_{k=0}^{n}p_k x_k^2-\mu^2=\sum_{k=0}^{n}k^2C_n^k p^k q^{n-k}-\mu^2=\sum_{k=1}^{n}k^2C_n^k p^k q^{n-k}-\mu^2$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(k^2-k)C_n^k p^k q^{n-k}+\sum_{k=1}^{n}kC_n^k p^k q^{n-k}-\mu^2$$

$$=\sum_{k=2}^{n}(k^2-k)C_n^k p^k q^{n-k}+\sum_{k=1}^{n}kC_n^k p^k q^{n-k}-\mu^2$$

$$=\sum_{k=2}^{n}n(n-1)C_{n-2}^{k-2} p^k q^{n-k}+\sum_{k=1}^{n}nC_{n-1}^{k-1} p^k q^{n-k}-\mu^2$$

$$=n(n-1)p^2\sum_{k=0}^{n}C_{n-2}^{k-2} p^{k-2} q^{n-k}+np\sum_{k=0}^{n}C_{n-1}^{k} p^k q^{n-1-k}-\mu^2$$

$$=n(n-1)p^2(q+p)^{n-2}+np(q+p)^{n-1}-(np)^2$$

$$=n(n-1)p^2+np-(np)^2=np(1-p).$$

这样的研究性课题虽然花的时间比较长，但是比多做几个课外习题更利于培养学生的数学修养和探究能力，这就要求教师必须突破教材、突破教法、突破观念. 2008 年江苏省高考数学附加题压轴题的思维和探求二项分布的数学期望和方差的思路一致，正是笔者长期坚持研究性课堂教学，所以我教的班级的同学在 2008 年高考中取得优异成绩，数学课代表考出 38 分的好成绩（总 40 分），2010 年江苏省高考数学普遍认为相当难，但通过三年的研究性教学，我所教的班级三位同学考到 180 分以上，还有一位同学附加题考了 40 分的满分，平均分 160 多分（总分 200 分），平均水平达到良好，而且我校的生源在我省四星级高中处于中等水平，全市前 3 名都在我教的班级. 对于研究性教学的好处可想而知.

2.课题研究的内容与方法

2.1 课题有关概念的界定

1、作为学习方式的研究性学习的含义：研究性学习是指学生在教师的指导下，从学习生活和社会生活中选择和确定研究课题，用类似科学研究的方式，主动地获取知识、应用知识、解决问题的学习活动。研究性学习作为一种新的学习方式和教学理念渗透并贯彻在高中新课程及数学新课程中。

2、关于探究性学习的含义：探究性学习与研究性学习二者并无本质差别，都是指学生的以类似科学研究的方式进行学习，主要目的是培养学生的创新意识、创造能力，只是提法不同罢了。“研究”一词似乎多了几分严谨、庄重，而“探究”则更有生气，更有动感。因此，我们把高中采用这种学习方式称为研究性学习，而更低年级采用这种学习方式则称为探究性学习，以示层次的不同，但内涵基本是一致的。

3、作为课程形态的研究性学习的含义：研究性学习作为一种课程形态，是指以特定的课题、项目为研究对象，以学生的研究性学习为实践活动方式，以培养学生的探究意识、创新精神和实践能力为目标取向的课程。随着作为我国目前在全国范围内所实施的基础教育课程改革的重要内容的“研究性学习课程”的实施和推广，“研究性学习”已经成为了基础教育中“研究性学习课程”的代名词。

4、**探究式教学的含义：**所谓探究式教学，就是以探究为主的教学。具体说，指教学过程是在教师的启发诱导下，以学生独立自主学习和合作讨论为前提，以现行教材为基本探究内容，以学生周围世界和生活实际为参照对象，为学生提供充分表达、质疑 、自由探讨问题的机会，让学生通过个人 、小组、集体等多种解难释疑尝试活动，将自己所学的知识应用于解决实际问题的一种教学形式。

3.课题研究的新认识

3. 1 研究性教学强调学生的协作精神

现代教育强调人为本，强调以学生为主体，研究性教学也不例外，研究性教学必须让所有的学生参与，让每个学生都有收获，这就要加强学生的团结协作精神. 数学课堂需要学生的共同参与，教师要承认学生之间学习的差异性，鼓励每个学生参与研究性教学，课堂上允许学生分组讨论，大胆发表自己的见解，鼓励学生上讲台发表自己的观点和题目的新解法. 这样可以调动学生的积极性，变被动学习为主动学习.

选修 2－2 推理与证明一章有一道探究性试题：试比较 n^{n+1} 与$(n+1)^n$ 的大小，分别取 $n=1,2,3,4,5$ 加以试验，再根据试验结果猜测一个一般性结论，再用数学归纳法证明. 在讲解这道题时，学生通过探究都能得到结论：$n=1$，2 时 $n^{n+1}<(n+1)^n$，$n\geqslant 3$ 时 $n^{n+1}>(n+1)^n$，但是用数学归纳法证明 $n\geqslant 3$ 时 $n^{n+1}>(n+1)^n$，学生开始都不会证明，这时我让学生分组讨论，如何用数学归纳法证明 $n\geqslant 3$ 时 $n^{n+1}>(n+1)^n$，几分钟后学生获得了两种证明方法，分别请他们板演. 一种是：假设 $n=k$ 时，不等式成立，即 $k^{k+1}>(k+1)^k$，也即$\dfrac{k^{k+1}}{(k+1)^k}>1$，则当 $n=k+1$ 时，注意到$\dfrac{k+1}{k+2}>\dfrac{k}{k+1}$得$\dfrac{(k+1)^{k+2}}{(k+2)^{k+1}}=(k+1)(\dfrac{k+1}{k+2})^{k+1}>(k+1)(\dfrac{k}{k+1})^{k+1}=\dfrac{k^{k+1}}{(k+1)^k}>1$，从而 $n=k+1$ 时不等式成立；另一种是：假设 $n=k$ 时，不等式成立，即 $k^{k+1}>(k+1)^k$，也即$\dfrac{(k+1)^k}{k^{k+1}}<1$，$(1+\dfrac{1}{k})^k<k$，则当 $n=k+1$ 时，$(\dfrac{k+2}{k+1})^{k+1}=(1+\dfrac{1}{k+1})^{k+1}=(1+\dfrac{1}{k+1})^k(1+\dfrac{1}{k+1})<(1+\dfrac{1}{k})^k(1+\dfrac{1}{k+1})<k(1+\dfrac{1}{k})=k+1$，即$(k+1)^{k+2}>(k+2)^{k+1}$. 接着，老师问数学不用数学归纳法能否对结论进行证明，从考虑某些数列的单调性再让学生展开讨论，一部分学生考虑数列$\{n^{\frac{1}{n}}\}$的单调性，得到构造函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}(x>0)$求导的做法；另一部分学生得到构造数列$\{\dfrac{n^{n+1}}{(n+1)^n}\}$的单调性的解法.

研究性教学强调学生的参与，在探究过程中，要不断完善学生的思维，提升学生分析问题、解决问题的能力，要不断暴露问题的本质，让思维达到质的飞跃.

3.2 研究性教学强调教师的引导作用

长期以来，老师和学生谁是教学的主体一直争论不休，现代教育学强调以学生为主体，2011 年《数学教育学报》曾经载文强调学生和教师为双主体，但无论如何教师在学生教学中的引导作用不容忽视，因为教师是教学的指挥者和决策者，循序渐进的引导是研究性教学不可缺少的. 研究性教学更加强调教师的引导，教师通过展现概念的产生过程、揭示命题的形成过程、展现思路的获得过程，不断地给学生抛出问题，让学生思考，不断地鼓励学生自己提出问题，进而通过分析、归纳、综合得出结论，通过猜想、合情推理等途径解决问题. 教师要在教学过程中不断积累研究性教学素材，通过不断的学习提高自己的研究能力，这样才能给学生做出榜样.

现代教育原理认为，教学过程是教与学双边互动的过程. 研究性教学，的确加强了“学生为主体”的地位，但是却不应削弱“教师为主导”的作用. 南开大学顾沛教师指出：教师的主导作用主要表现为，在研究性教学中，教师应扮演设计者、组织者、启发者、引导者、活动过程的评判者、鼓励者和促进者的角色，而决不能仅仅作为开题者、欣赏者和总结者.

教师作为研究性教学中的“设计者”，首先要选取适合研究性教学的内容，选取的原则有 4 条：一是该内容贴近学科和课程的精髓，二是其中有适合学生自主思考和探索的“抓手”，三是问题的难易、大小、繁简适宜，四是能够激发学生的学习兴趣和探究热情. 教师作为“设计者”，在选取内容时可以适当地整合知识点，使之体现该学科的“思想”；这些“思想”往往是知识点遗忘后仍然能够留存下来的东西.

教师作为研究性教学中的组织者，要善于组织实施事先设计的方案，并在实施中作随机应变的调整. 所谓“组织”，既包括整个教学过程的组织，也包括某一个教学环节的组织.

教师作为研究性教学中的启发者，应通过多种多样的方式、方法、手段，启发学生的思考，启迪学生的智慧，开发学生的潜能. 我们采用的启发手段有：（1）设置情境，引而不发，让学生自己质疑和探究；（2）用教具和多媒体演示引起学生的联想和思考；（3）用有针对性的点拨开发学生的潜能；（4）用讨论式教学，让学生互相启发.

教师作为研究性教学中的引导者，应在教学的全过程指引学生探索的方向，指导学生在曲折和跌宕中前进. 研究，很少是一帆风顺的. 让学生体会其中的沟沟坎坎，体验面对困难的心态，锻炼克服困难的意志，学会克服困难的方法，积累克服困难的经验，享受克服困难的乐趣，这本身也是研究性教学的重要目的.

教师作为研究性教学中的活动过程的评判者，应该随时对学生的探究作出评判，及时指出探究正确与否，探究的方向、方法，及时引导.

教师作为研究性教学中的鼓励者，在学生取得任何一点儿进步时，都应满腔热情地给予肯定，鼓励他们走向成功.

教师作为研究性教学中的促进者，应从多个角度促成、推进研究性教学的发

展. 除了从教育理念、教学过程上起促进作用以外，还应从考评的方式和内容上对研究性教学起促进作用.

教师作为研究性教学的直接参与者，平时要不断地积累研究性教学的素材，以便今后教学中使用，这些素材一方面可以来自课本，江苏版数学教材每个章节后都提供了一些探究拓展习题，这些都是非常优秀的，我平时几乎对每个习题都和同学们一起探究，另一方面，历年的高考数学试题也为我们提供了许多探究性问题的素材，一些数学期刊与网络论坛的问题也可以成为研究性教学的素材加以积累.

例如在学习等差数列前 n 项求和公式 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$后可以引导学生考虑问题的逆命题：一个无穷数列的前 n 项求和公式是 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$，这个数列是不是等差数列，从而得到已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n, 证明：$\{a_n\}$是等差数列的充要条件是 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$.

在讲解等比数列的前 n 项求和公式时，可以引导学生考虑求和公式的其他证明方法.

另外，在研究性教学过程中教师要培养自己在教学的应变能力和组织能力，随时应付课堂上的突发事件.

例如在讲解多项式导数公式时，课本根据 $x'=1$，$(x^2)'=2x$，$(x^3)'=3x^2$，归纳出$(x^n)'=nx^{n-1}$，这时会有学生提出来老师你把公式证明一下，这时你要考虑到学生这时没有学习二项式定理，所以你要想到用因式分解公式 $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$证明这个公式.

3.3 研究性教学要求应用多种教学手段，提高学生的学习能力

在进行研究性教学的过程中，老师要利用多种教学手段进行教学，充分利用计算机技术和网络技术，让学生获得更多的知识，在解析几何习题教学中经常将几何画板技术应用到课堂中，对动点运动轨迹的产生让学生自己提高画板进行演示，获得结论，再加以证明，这样培养了学生的动手能力，让学生直接参与到老师的教学过程.

3.4 研究性教学要求知识的考查方式多样

在研究性教学模式下，学生知识的考查不能单一地笔试来评价学生，我们要求学生尝试数学小论文的创作，组织学生参加各类社会实践活动，平时考试时要增加一些研究性试题，近年来，部分省市的高考试题中也出现了这方面的试题，这对于研究性教学的开展是有好处的. 笔者曾尝试在每周练习中增加适合学生现场研究的试题，这些试题有的来自课本的探究拓展和思考运用部分的试题，有的来自高考数学试题的变形或推广.

例如：证明平面内 n 条直线最多将平面分成$\dfrac{n(n+1)}{2}+1$ 块；探究空间 n 个

平面最多将空间分成多少个部分. 这样的试题出自课本习题.

设 $1=a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_{2n+1}$，其中 a_1，a_3，…，a_{2n+1} 成公比为 q 的等比数列，a_2，a_4，…，a_{2n} 成公差为 1 的等差数列，求 q 的最小值. 此题改编自 2011 年江苏省高考试题：设 $1=a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_7$，其中 a_1，a_3，a_5，a_7 成公比为 q 的等比数列，a_2，a_4，a_6 成公差为 1 的等差数列，则 q 的最小值是__________.

启发式教学、讨论式教学、研究性教学和探索性教学，都是在实践中行之有效的教学方法. 它们在提法上侧重点不同，而共同的核心都是：在教学中以学生为中心，以人为本，以调动学生自身的学习主动性、积极性为手段，以提高学生的学习兴趣、学习能力、创新意识为宗旨，在启迪学生潜能、激发学生思维的过程中传授知识与技能. 这些教学方法认为，不但获取知识与能力对学生是一种提高，参与研究性学习的过程本身对学生也是一种提高. 教师也不必要把每一节课都设计为研究性教学. 一定要注意具体情况具体分析. 其实，好课可以是千姿百态的；甚至同样的教学内容，不同的教师也可能上出看起来很不一样的好课来. 这就是所谓“教无定法，贵在得法”.

4.课题研究的理论依据

4.1 **认知心理学理论**　认知心理学理论强调学习过程是一个主动地接受信息和创造性的思维过程。它把学习过程分为这样三个阶段：一是问题表征阶段，学生对需要解决的问题进行表征和理解，这种表征依赖于学生已有的知识，优秀学生和差生对课题理解的差异主要是由他们的认知结构所引起。二是策略选择阶段，在明确问题的各个方面以后，人们需要提出各种解决问题的策略并进行假设检验，最后在教师指导和自己的探索下，形成自己解决问题的策略。三是反思结构阶段，首先是对整个思维过程进行检查，检验策略是否合理，答案是否正确，其次是评估问题解决过程中值得吸收的经验，并对认知结构进行必要的调整。

4.2 **建构主义理论**　皮亚杰的建构主义模式也为研究性学习课程资源的开发奠定了心理学基础，在建构主义模式下，学习被视作一个动态的过程，学习过程是通过学生与外部环境相互作用，实现同化和顺应，从而使自身的认知结构得以转换和发展。其中，同化实现了认知结构的量的补充，把环境因素也纳入人的认知结构；顺应则是认知结构质的变化，是对认知结构的调整以利于接受新的环境信息。在建构过程中，新的认知冲突出现后，同化和顺应实现对认知冲突的解决，实现新的平衡，从而促进了认知的发展。另外，从学生生理心理特点来看，学生有探究和创造的潜能，研究性学习课程资源的开发可激发学生学习的兴趣及求知欲。

4.3 **新课程教学理论**　《基础教育课程改革纲要》中指出，基础教育新课程改革就是要全面推进素质教育，培养学生的创新精神和实践能力，因此要树立崭新的课程观、教学观和学生观。新课程观要使获得知识与基本技能的过程同时成为学会学习和形成正确价值观的过程，强调课程内容与学生生活以及现代社会和科技发展的联系，关注学生的学习兴趣和经验，精选终身学习必备的基础知识和技能。在教学观上，要倡导学生主动参与、乐于探究、勤于动手，培养学生搜集和处理信息的能力、获取新知识的能力、分析和解决问题的能力以及交流与合作的能力。在学生观上，教师在教学过程中应与学生积极互动、共同发展，注重培养学生的独立性和自主性，引导学生质疑、调查、探究，促进学生在教师指导下主动地、富有个性地学习。教师还应尊重学生的人格，关注个体差异，满足不同学生的学习需要，创设能引导学生主动参与的教育环境，激发学生的学习积极性，

培养学生掌握和利用知识的态度和能力，使每个学生都能得到充分的发展。

4.4 **多元智能理论** 多元智能理论为教师们提供了一个积极乐观的学生观，即每个学生都有闪光点和可取之处，要求教师在可能的范围内，根据学生智力特点的不同、教学内容的不同和教育对象的不同，创设各种适宜的、能够促进学生全面充分发展的教学手段、方法和策略，使学生能以向他人（包括自己）展现他们所学的、所理解的内容的方式去了解和掌握教学材料，并给予每个学生最大限度的发展机会，使每个学生都能成为成功的、有效的学习者。按照加德纳的观点，学校教育的宗旨应该是开发多种智能并帮助学生发现适合其智能特点的职业和业余爱好，应该让学生在接受学校教育的同时，发现自己至少有一个方面的长处，学生就会热切地追求自身内在的兴趣。以多元智能理论为指导的全新的个性化的教学理念和最优的教与学的方式，为研究性学习课程的有效实施提供了理论基础。

5.“理论型”课题研究的选题

著名教育家叶圣陶先生告诫广大教师：“教师之教，不在于全盘讲授，而在于相机引导.”教育的真正目的是“为了达到不需要教.”叶老的话里的引导就是指引、诱导，教师在数学教学中要达到叶老的“不需要教”，就要引导学生进行研究性学习.数学研究课题有两类：一类是实际应用型的，另一类是理论型的. 数学研究性学习也应该有相应的两类课题，刘卓雄教授在《数学通报》上呼吁：在重视实际型研究课题的同时，要注重理论型研究课题.

如何引导学生进行“理论型”研究，通过多年的教学实践，本人总结了一些研究课题的选取方法和具体做法，数学研究性学习的开展，既能提高学生的数学修养，又能提高学生的应试能力，在当前新课程理念下，是一种行之有效的教学方式，它可以弥补“满堂灌”教学模式的不足，是课堂教学模式的一次革命.

下面谈谈引导学生进行“理论型”研究课题的实践和做法，供广大教师参考

5.1 从课本中挖掘宝贵资源

课本是学生获得知识的第一手资料，它是数学家和数学教育家根据教学大纲和课程标准精心编写的，是上百年、上千年人类数学知识的结晶，但课本是浓缩的精华，教师可以引导学生从课本中挖掘研究性学习的资源.

1 引导学生多方位探究课本公式、定理的证明

课本中公式的证明可能只有一种方法的证明，教师可以引导学生从多角度进行证明.

例如，在学习等差数列的通项公式时，课本通过简单的归纳得到公式，这样的方法的科学性要提醒学生去探究，让他们从等差数列的定义出发寻求严格的证明；等比数列的求和公式课本采用的是错位相减法，教师可以引导学生进行探索，得到其他证明方法，如下面的整体思考方法：

$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$

$=a_1+a_1q+a_1q^2+\cdots+a_1q^{n-1}$

$=a_1+q(a_1+a_1q+a_1q^2+\cdots+a_1q^{n-2})$

$=a_1+q(a_1+a_1q+a_1q^2+\cdots+a_1q^{n-2}+a_1q^{n-1})-a_1q^n$

$=a_1+qS_n-a_1q^n$，

所以$(1-q)S_n=a_1-a_1q^n=a_1(1-q^n)$.　　③

当 $q\neq1$ 时，$S_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$；

当 $q=1$ 时，数列$\{a_n\}$是等差数列，公差为 0，所以 $S_n=na_1$.

课本正弦定理和余弦定理的证明，是通过向量法进行证明的，老师可以引导学生探求正弦定理的平面几何方法，因为这种证明方法既本质又能反映人类知识的前因后果，引导学生从不同的角度探求余弦定理的证明方法，引导学生探求正弦定理、余弦定理、射影定理三者之间的联系和等价性；课本上两角和差三角函数是从两角差的余弦公式展开的，教师可以引导学生探求两角和的正弦公式的证明，可以介绍面积证明方法（张景中教授）和平面几何托莱美定理证明的方法，再比如课本对概率中二项分布和超几何分布的数学期望和方差公式并没有证明，教师可以引导学生进行研究性探究，得到它们的证明；在不等式一章，课本研究算术平均和几何平均之间的关系，教师可以引导学生研究两个正数的平方平均、算术平均、几何平均和调和平均之间的关系$\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}\geqslant\dfrac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}\geqslant\dfrac{2ab}{a+b}$；在讲授二项式定理时，可以引导学生从多角度对定理进行证明. 这方面的课题还有很多，教师可以引导学生加以研究.

2 引导学生多方位探究课本例题

课本的例题的教学功能是无法取代的，现在有一种教学模式正在大江南北流行，每天一张教案供教师上课用，一张学案供学生课后完成，这种模式高三这样也就算了，这样的模式高一、高二也在推广，这里我不得不给这种模式拨一拨冷水，这样做一是无视课本的教学功能，二是浪费国家资源(纸张). 其实课本例题是编著精心挑选的，教师必须将课本的例题钻研透，做到举一反三.

例如，在解三角形一章，课本讲到三角形的中线长公式，教师可以启迪学生用不同的方法进行证明，还可以启迪学生推导三角形高线长公式、角平分线长公式，这样可以提高学生数学学习的兴趣，是学生感到学习数学不只是做几道题.

3 引导学生多方位探究课本例题

课本的习题也是研究性学习的好材料，在解三角形一章，课本选用了 2001 年高考试题：已知圆内接四边形 $ABCD$ 的边长 $AB=2$，$BC=6$，$CD=DA=4$，求四边形的面积；教师可以引导学生探究：已知圆内接四边形 $ABCD$ 的边长 $AB=a$，$BC=b$，$CD=c$，$DA=d$，求四边形的面积，得到 $S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$，其中 $p=\dfrac{1}{2}(a+b+c+d)$，通过它的证明还可以得到即 $BD=\sqrt{\dfrac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}}$，$AC=\sqrt{\dfrac{(ad+bc)(ac+bd)}{ab+cd}}$.两式相乘得 $AC\cdot BD=AB\cdot CD+AD\cdot BC$. 这就是几何学中著名的托勒密定理. 在圆锥曲线一章课本有好多习题是研究椭圆、双曲线、抛物线的另外形成的方法，实际上是圆锥曲线的其他定义，也是这几年高考常考的，教师可以引导学生进行探讨：圆的直径 AB 所对的圆周角$\angle ACB$ 是直角，即 $k_{AC}k_{BC}=-1$，对于椭圆的直径 AB 所对的圆周角$\angle ACB$ 总有 $k_{AC}k_{BC}=-\dfrac{b^2}{a^2}$，对于双曲线

的直径 AB 所对的圆周角 $\angle ACB$ 总有 $k_{AC}k_{BC}=\frac{b^2}{a^2}$；在研究抛物线焦点弦性质时，课本安排了几道有价值的习题，教师可以把这些习题编排在一起，并结合高考试题让学生研究：过抛物线 $y^2=2px(p>0)$的焦点 F 作一条倾斜角为θ的直线与抛物线交于 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，过 A，B 分别作准线 l 的垂线，垂足分别为 C，D，抛物线的对称轴与准线交于 E，则(1)$y_1y_2=-p^2$，$x_1x_2=\frac{p^2}{4}$；(2)$\angle AEB=90^\circ$；(3)$AB=\frac{2p}{\sin^2\theta}$；(4)$\frac{1}{FA}+\frac{1}{FB}=\frac{2}{p}$；(5)$A$，$O$，$D$ 与 B，O，C 三点共线；(6)以 AB 为直径的圆与准线 l 相切；(7)过 A，B 分别抛物线 $y^2=2px$ 的切线 PA、PB，则交点 P 在准线 l 上，且 PF 垂直于 AB；(8)AB 中点 M 的轨迹是抛物线；(9) 记$\triangle FAC$，$\triangle FCD$，$\triangle FBD$ 的面积分别为 S_1，S_2, S_3，则 $S_2^2=4S_1S_3$；(10)当 AB 与 x 轴不垂直时，AB 的垂直平分线与 x 轴交于 N，则$\frac{MN}{AB}$是常数（其中 M 是线段 AB 的中点）. 将这些试题一起研究, 既可以节省大量时间, 又可以让学生对抛物线焦点弦的性质有进一步了解, 相应的性质移植到椭圆、双曲线，可以得到相应的结论.

利用正弦定理、余弦定理求距离和高方法的复习小结

（1）对于求两点之间的距离问题

① 苏教版数学必修 5 第 14 页例 2：A，B 两地之间隔着一个水塘，现选择另一个点 C，测得 $CA = 182$ m，$CB = 126$ m，$\angle ACB = 63°$，求 A，B 之间的距离（图 3）.（此题属于两点之间不可通又不可视的距离问题）

图 3

解题方法：直接运用余弦定理解决.

② 苏教版数学必修 5 第 10 页练习 1：为了在一条河上建一座桥，施工前在河两岸打上两个桥位桩 A，B．要测算出 A，B 两点的距离，测量人员在岸边定出基线 BC，测得 $BC = 78.35$ m，$\angle B = 69°43'$，$\angle C = 41°12'$，试计算 AB 的长（图 4）.（此题属于两点之间可视但不可达的距离问题）

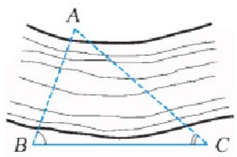


图 4

解题方法：由$\angle B$，$\angle C$ 计算$\angle A$，再直接运用正弦定理解决.

③ 苏教版数学必修 5 第 18 页例 1：为了测量河对岸 A，B 之间的距离，在河岸这边取点 C，D，测得$\angle ADC = 85°$，$\angle BDC = 60°$，$\angle ACD = 47°$，$\angle BCD = 72°$，$CD = 100$ m，设 A，B，C，D 在同一平面内，试求 A，B 两点之间的距离（图 5）.（此题属于两点之间都不可达的距离问题）.

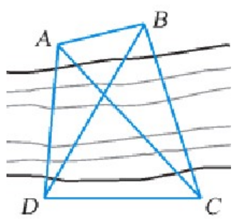


图 5

解题方法：用②的方法求 AC 之间的距离或求 BD 之间的距离；再用①的方法，在$\triangle ABC$ 中求 AB，或在$\triangle ABD$ 中求 AB．把一个比较复杂的问题转化为熟悉的简单问题进行处理.

（2）对于求物体高度的问题

苏教版数学必修 5 第 11 页习题 1.1 第 3 题：如图从 A 点和 B 点测得上海东方明珠电视塔顶 C 的仰角分别为 38.3°和 50°，$AB = 200$ m，求东方明珠电视塔的高度（图 6）.

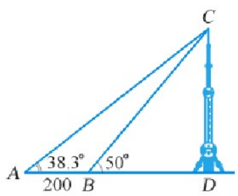
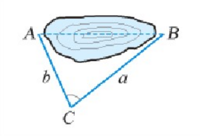
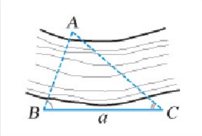
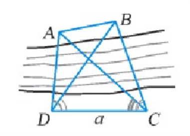
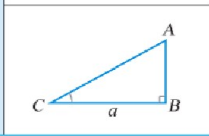
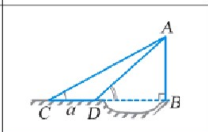
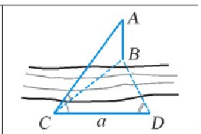


图 6

解题方法：在$\triangle ABC$ 中利用正弦定理求出 BC，在转化为在直角$\triangle BCD$ 中求高 CD.

对于求距离和测高度的问题类型可以归纳如下：

	两点间不可通又不可视	两点间可视但不可达	两点都不可达
求距离			
	底部可达	底部不可达	
求高度			

以上问题类型处理方法可以在教师的指导下，由学生对照例题和习题的解题方法自行总结，让学生在总结的过程中体会转化与化归的数学思想，以达到复习巩固熟悉解题方法的目的.

点评　正弦定理、余弦定理是反映三角形边角关系的重要定理，利用正弦定理、余弦定理可以将三角形的边的关系与角的关系进行相互转化，许多实际问题（如测量问题）都可以转化为解三角形的问题来研究. 课本中许多相关的测量问题（求高、求距离等）分散在本节内容的例题和习题中，我们复习时，可以将这些问题集中再现，总结归类，达到熟悉思想、掌握方法、解决问题的目的，这种总结方式的过程充分展示了分类的思想和转化与化归的思想.

应当指出，由于同一内容可以蕴含不同的数学思想方法，而同一思想方法又常常分布在许多不同的知识点里，因此利用单元小结或复习的时间，以适当集中的方式，从纵横两方面整理、概括和提炼数学思想方法是十分必要的.

5.2 从高考试题中挖掘宝贵资源

学生现阶段学习的一个目的是参加高考，在高考中取得优秀成绩，因此，在研究性学习中选取高考试题让学生研究，也是“理论型”研究性学习的一个重要途径. 下列几道试题都是研究等差数列的性质的，将它们一起研究，学生对等差数列将有进一步的理解

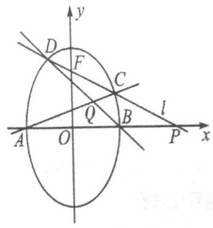
如果数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}(n\in \mathrm{N}^*)$，则数列$\{a_n\}$是一个等差数列.（1994 年全国高考数学试题）

设数列 a_1，a_2，…，a_n，…中的每一项都不为 0. 证明：$\{a_n\}$为等差数列的充分必要条件是：对任何 $n\in\mathrm{N}^*$，都有$\dfrac{1}{a_1a_2}+\dfrac{1}{a_2a_3}+\cdots+\dfrac{1}{a_na_{n+1}}=\dfrac{n}{a_1a_{n+1}}$. (2010 年安徽省高考数学试题)

设数列$\{a_n\}$的前 n 项的和记为 S_n,已知 $a_1=1$，$a_2=6$，$a_3=11$，且
$(5n-8)\,S_{n+1}-(5n+2)\,S_n=An+B$，$n=1,2,3,\cdots\cdots$，其中 A、B 是常数.
(1)求 A 与 B 的值；(2)证明数列$\{a_n\}$是等差数列. (2005 年江苏高考数学试题)
设 M 为部分正整数组成的集合，数列$\{a_n\}$的首项 $a_1=1$，前 n 项的和为 S_n，已知对任意整数 $k\in M$，当 $n>k$ 时，$S_{n+k}+S_{n-k}=2(S_n+S_k)$都成立．(1)设 $M=\{1\}$，$a_2=2$，求 a_5 的值；(2)设 $M=\{3，4\}$，求数列$\{a_n\}$的通项公式．(2011 年江苏高考数学试题)

在研究解析几何高考试题时将一些试题串联研究可以将命题的本质看透：

已知曲线 C：$(5-m)x^2+(m-2)y^2=8(m\in\mathbf{R})$.
(1)若曲线 C 是焦点在 x 轴上的椭圆，求 m 的取值范围；
(2)设 $m=4$，曲线 C 与 y 轴的交点为 A，B(点 A 位于点 B 的上方)，直线 $y=kx+4$ 与曲线 C 交于不同的两点 M，N，直线 $y=1$ 与直线 BM 交于点 G，求证：A，G，N 三点共线.(2012 年北京市高考数学试题)



椭圆有两顶点 $A(-1,0)$，$B(1,0)$，过其焦点 $F(0,1)$的直线 l 与椭圆交于 C，D 两点，并与 x 轴交于点 P．直线 AC 与直线 BD 交于点 Q．当点 P 异于 A、B 两点时，求证：·为定值. (2011 年四川省高考试题)

在平面直角坐标系 xOy 中，如图，已知椭圆$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$ 的左右顶点为 A，B，右顶点为 F，设过点 $T(t，m)$的直线 TA，TB 与椭圆分别交于点 $M(x_1，y_1)$，$N(x_2，y_2)$，其中 $m>0$， $y_1>0$， $y_2<0$.
设 $t=9$，求证：直线 MN 必过 x 轴上的一定点. (其坐标与 m 无关) (2010 年江苏省高考数学试题)
将这三道道试题一起研究，可以得到圆锥曲线的一个重要性质：
在椭圆中，已知$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$定点 $D(t,0)$和直线 l： $x=\frac{a^2}{t}$，这里 $0<t<a$，AB 是经过点 D 的一条弦，MN 是椭圆的另一条弦，且直线 AM，BN 交于点 P，则点 P 在直线 l 上的充要条件是直线 MN 经过点 D.
将 2012 年安徽省和福建省解析几何考题进行联系研究，也可以得到圆锥曲线的一般性结论.

5.3 从数学发展史中挖掘宝贵资源

初等数学的历史源远流长，给我们深入进行研究性学习提供了大量的宝藏，如著名的斯坦纳公式是几何学中求两条异面直线所成角的公式：四面体 $ABCD$ 中，AC，BD 所成角为 θ，则 $\cos\theta=|\frac{(AB^2+CD^2)-(AD^2+BC^2)}{2AC\cdot BD}|$. 此定理在平面几何中仍然成立. 教师可以引导学生对定理进行证明, 再利用公式求异面直线所成的角. 再如平面几何中有好多重要的结论可以在解析几何中进行推广，如：过圆外点 O 作圆 C 的两条切线 OA、OB，切点依次为 A、B，过点 O 引直线 l 交圆 C 于 D、E 两点，交直线 AB 于点 F，则$\frac{1}{OD}+\frac{1}{OE}=\frac{2}{OF}$. 这个命题可以推广到一般圆锥曲线；这样的例题很多，平面几何中的许多问题，还可以向空间推广，如三面角余弦定理，正弦定理都是平面几何定理在空间的推广，老师都可以引导优秀学生进行探求，圆锥曲线的光学性质涉及到圆锥曲线的切线，老师都可以带领学生进行探讨.

5.4 从初等数学研究的前沿中挖掘宝贵资源

目前，全国各个省市都有一些数学期刊，如《数学通报》、《中学数学月刊》、《数学通讯》，每期上都有初等数学研究的论文，教师可以有选择地介绍给学生，使他们增加自己的阅历，提高解题能力.

例如，数学期刊经常研究下列几个问题：设 $f(x)=\frac{1}{2^x+\sqrt{2}}$，利用课本中推导

等差数列前 n 项和的公式的方法，可求得 $f(-5)+f(-4)+\cdots+f(0)+\cdots+f(5)+f(6)$ 的值为_______. (2003 年上海市春季高考试题)；已知 $f(x)=\frac{4^x}{4^x+2}$，则 $f(\frac{1}{1001})+f(\frac{2}{1001})+\cdots+f(\frac{999}{1001})+f(\frac{1000}{1001})$ 的值是_______.（1986 年全国高中数学联赛题）；已知 $f(x)=\frac{9^x}{9^x+3}$，求 $f(\frac{1}{1996})+f(\frac{2}{1996})+\cdots+f(\frac{1994}{1996})+f(\frac{1995}{1996})$ 的值.（1995 加拿大数学奥林匹克数学竞赛题）；我们组织学生探求一般函数 $f(x)=\frac{pa^x+q}{ra^x+s}(ps-qr\neq 0, rs\neq 0)$ 得到分式函数有对称中心为 $(\frac{1}{2}\log_a\frac{|s|}{|r|}, \frac{1}{2}(\frac{p}{r}+\frac{q}{s}))$.

再比如数学期刊有很多文章研究三角形的五心的向量表示，得到了很多结论，我们适当向学生介绍，使他们对知识的理解得到进一步升华.

数列一章中，由递推关系求数列的通项公式是学习数列的一个重要内容，对于常见题型各大期刊时有研究，教师可以选择最简单的方法介绍给学生，这样可以提高他们数学学习的兴趣，又可以获得更多的知识.

5.5 从学生和同行的疑难中挖掘宝贵资源

学生是教学的主体，也是教育的受益者. 学生在学习数学的过程中可以产生大量的问题，这些问题是研究性学习的重要的资源. 学生在高一学习集合时，如果许多老师直接告知学生 n 个元素的集合有 2^n 个子集，有些优秀学生会问这是怎么来的，老师就要引导他，从简单入手，加以归纳，学生在学习极坐标时，求两个曲线 $\rho=\cos\theta$ 和 $\rho=\sin\theta$ 的交点时，只能求出一个交点 $(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\pi}{4})$，这时老师要引导学生通过作图知道还有一个交点就是极点 $(0,\theta)$，从而引导学生探究一般情况下，两个极坐标方程所表示的曲线的交点个数如何来求，首先要看极点是否在两个曲线上，还要将关于 (ρ,θ) 的方程化为关于 $(\rho,2\pi k+\theta)$ 及 $(-\rho,\theta+(2k+1)\pi)$ 的方程去求交点，因为一个点的极坐标有多种表示，这样学生对极坐标的认识就会更加深刻.

通过老师之间的学习和交流也能获得研究性学习的课题，有老师在研究 2005 年福建省高考试题 12 时，发现试题提供的解答有问题：$f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上以 3 为周期的奇函数，且 $f(2)=0$，则方程 $f(x)=0$ 在区间 $(0,6)$ 内解的个数的最小值是_____.　*A*. 2　*B*. 3 *C*. 4　*D*. 5

参考解答为 *D*. 经过研究发现题目的解答应该为 7 个. 由于 $f(x)$ 是奇函数，所以 $f(-x)=-f(x)$，令 $x=0$ 得 $f(0)=0$，因为 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上以 3 为周期的函数，所以 $f(3)=0$，由 $f(2)=0$，得 $f(-2)=-f(2)=0$，$f(-1)=f(-1+3)=f(2)=0$，又

$f(x)$是奇函数，所以$f(1)=0$，从而$f(4)=0$，$f(5)=f(2+3)=f(2)=0$；因为$f(x)$是周期为 3 的函数，所以$f(\frac{3}{2})=f(-\frac{3}{2}+3)=f(-\frac{3}{2})$，又$f(x)$是奇函数，所以$f(-\frac{3}{2})=-f(\frac{3}{2})$，从而$f(\frac{3}{2})=0$，$f(\frac{9}{2})=f(\frac{3}{2}+3)=0$，所以$f(x)=0$在区间$(0,6)$内至少有 7 个根.

6.课题研究的原则和方法

根据研究性学习课程资源多样化的特点和类型，我们认为，研究性学习课程资源的开发应遵循如下一些原则。

6.1 坚持开放性原则

研究性学习课程资源开发的开放性包括过程的开放性、内容的开放性、方式方法的开放性。研究性学习课程资源开发的过程本身就是一个开放的过程，只有在教学实践中不断地运用、反馈、修改、补充、积累，才能逐渐丰富和完善。研究性学习课程资源开发是一个长期的过程，需要越来越多的学生参与，教师不断地总结经验教训，去芜存精，不断补充资料和改进。研究性学习课程资源的内容也是开放的，随着时代的发展，学生实际情况的变化，研究性学习课程的内容和要求势必发生变化，我们应根据实际需要及时进行调整。研究性学习课程资源开发的方式以教师为主体，鼓励学生参与，构成一个全方位的开放的课程资源开发系统。

6.2 坚持经济性原则

研究性学习课程资源开发的经济性原则是指要以最小的人力、物力、财力的投入，开发出更多更好的课程资源。首先是开支的经济性，要用最节省的经费开支取得最佳的效果，尽可能开发和利用不需要多少经费开支的研究性学习课程资源。其次是时间的经济性，应尽可能开发和利用那些对当前研究性学习课程的实施有现实意义的课程资源。第三是空间的经济性，在研究性学习课程资源的开发中应尽可能就地取材，不应舍近求远，好高骛远。第四是学习的经济性，要尽可能开发与利用能激发学生学习兴趣的课程资源。

6.3 坚持共享性原则

研究性学习活动过程也是学生、教师共同学习如何合作与分享的过程。研究性学习课程资源的共享不仅可以缓解课程资源短缺的矛盾，提高资源的利用效率，还可以培养学生、教师在不同时间范围、空间范围内资源共享的意识，感受人与人之间互帮互助、分享合作的精神。研究性学习课程资源的共享有国际间、校际间的资源共享；课题组内的资源共享；社会范围内的资源的共享。研究性学习课程资源开发的共享原则，还包括发现、搜集研究性学习课程资源的途径与方法的共享。因此共享性原则，既有课程资源本身的共享，又有开发课程资源的方法的共享。

6.4 坚持努力性原则

数学研究性学习课程资源是从数学各个分支中选取出来的宝贵资源，它是数学再创造的过程。数学研究性学习课程资源开发作为一种教育实践活动，不是随意而行的，需要数学教师努力研究数学课程的各个分支，选取有价值的研究性课题让老师、同学共同研究，促进师生和谐地可持续地发展。

6.5 坚持渐进性原则

做任何事情，都必须遵循一定的程序和步骤，做到有序进行、合理安排。课

程资源是丰富的、大量的、广泛的，涉及到中学数学等诸多章节：代数、平面几何、三角函数、平面向量、立体几何、概率与统计、平面解析几何。研究性课程资源开发的循序渐进原则主要体现为先近后远、先易后难、先简后繁、先浅后深等，以校内资源为根本，逐渐向周边扩展，将零星的、散落的、无序的各种各类课程资源，通过整理、加工，使之成为集中的、系统的、可供直接利用的课程资源。

6.6 课题研究的方法

本研究主要包括理论研究法、调查法、行动研究法（上研究性教学示范课）等研究方法。

7.课题研究的成果

通过《数学教学中加强研究性学习的研究》课题的开展，我们取得了丰硕成果.

我们工作室在蔡玉书、陈兆华老师的带领下，通过学习《数学教育学报》顾沛教授《试论研究性教学中教师的作用》以及张学润教授《研究性教学在高等数学教学中的实施浅析》等方面的论文和论著，共同提高全体成员的业务水平，认真撰写课题论文、开展各类讲座、参加各类比赛.

蔡玉书老师作为省级重点课题《高中数学研究性学习的实践与认识》的第一主持人，在江苏省第一中学校以蔡玉书名师工作室为平台，带领年轻教师参加课题的研究。2010 年 8 月在中国数学会主办的核心期刊《数学通报》上发表了《数学教学中加强研究性学习的思考与做法》，2010 年 11 月在《数学通报》上发表了《江苏省 3 年高考数学试题的研究和认识》，2012 年 12 月在《中学数学月刊》上发表了《高中数学研究性学习中的“理论型”研究课题的选取》，这些工作为申报课题做了充分的理论准备，蔡老师每年 8 月在《中学数学月刊》上发表当年《全国各地高考数学试题赏析》，2010 年至 2011 年在《中学数学月刊》上连载中学数学竞赛系列讲座 13 篇，在《中学数学月刊》、《中等数学》、《数学通讯》等刊物发表多篇数学奥林匹克讲座稿和数学奥林匹克试题的多种解法和拓展方面的论文，2011 年在中国科学技术大学出版社出版专著《重要不等式》，在哈尔滨工业大学出版社出版专著《数学奥林匹克不等式证明方法与技巧》，2017 年 8 月在中国科学技术大学出版社出版专著《解析几何竞赛读本》，每年参加苏州大学《中学数学教学与测试》高三二轮复习资料的编写.蔡玉书老师 2016 年 11 月 8 日应相城区陆慕高级中学的邀请在高二（1）班开设研究性教学的示范课《椭圆方程的推导》，万福昌老师将课堂实录发表在《中学数学月刊》上，这篇文章 2017 年 7 月被中国人民大学核心期刊《中学数学教学资料》转载，得到全国各地老师的好评.蔡玉书老师多年一直参加江苏省数学奥林匹克夏令营的授课，为全省优秀学生作竞赛专题讲座.

陈兆华老师作为省级重点课题《高中数学研究性学习的实践与认识》的第二主持人，全程负责并参与了本课题的研究，并以苏州市田家炳实验高级中学为研究基地学校，立足课堂教学研究，注重实践，加强反思，以身作则，带动苏州市一大批中青年教师开展了一系列基于数学教学问题的研究性活动。这几年的教学成效明显，在 2017 年江苏省教学成果奖的评比中也获得一等奖的荣誉。

一是积极开展公开示范课、研究实验课活动，他每年在大市范围开设公开课不少于 3 节，加强对青年教师的课堂教学指导，研究各种课型的有效性教学，如章节起始课，概念课，习题课，实验研究课等，指导多名教师获得评优课与基本

功比赛一等奖，例如：作为本课题核心成员（第 1）王耀（苏州市田家炳实验高级中学教师）获苏州市区教师评优课一等奖。

二是把研究成果作系列总结，产生了有一定影响的论文，在推广进程中，本人撰写了论文《手持技术与高中函数教学整合研究》刊登于核心期刊《数学教育学报》上，《透视高考试题 展望课改方向》被人大复印转载，《数学实验与数学发现》发表于《中学数学教学参考》，《规范流程，解决古典概型》发表于《数学教学》，《向量问题套用模式的错因分析》发表于《中国数学教育》。

三是以讲座形式作课题研究成果推广，除在本市作一系列专题讲座外，还在全国其他省、市、区作成果交流。也有直接与学生开展的学法指导，倡导学生立足课堂，增强学习的主动性，开展研究性学习，取得良好效果。

四是倡导多元教学方式，信息技术辅助教学。传统的数学课堂教学方式死板单一，随着信息技术融入课堂后，又出现了泛滥成灾的极端现象，如何科学理性运用信息技术辅助教学是值得研究的课题。在研究过程中，我们意识到外部媒介对促进课堂教学效果起到关键的作用，为此我们对信息化手段下的教学进行了单独的研究，不论是运用数学软件 Geogebra、“几何画板”等实现数学教学的直观化和互动化，还是运用手持技术、未来教室、“极课”大数据等辅助教学，实现教学手段多元化，这些都让我们意识到：教师应充分运用现代化教学手段，指导学生进行研究性学习活动，提升数学学习的有效性。

陈兆华老师多年也一直参加江苏省数学奥林匹克夏令营的授课，为全省优秀学生作竞赛专题讲座.

王耀博士在参与课题研究期间，从数学教育、教学、教研等多个层面进行研究性学习的研究，取得了丰硕的成果，在刚刚结束的 2017 年江苏省教学成果奖的评比中，荣获江苏省一等奖的好成绩。

首先，他平时积极思考，勤于研究，发表多篇教研论文，例如：对教学中关于基本不等式的教学思考，从问题解决的角度与学生研究教材，学习教材，并整理成文《数学问题解决的教学实践与思考》2016 年 1 月发表于《中国数学教育》。

与课题组第二主持人陈兆华老师合作的论文《核心素养指导下的数学解题实践与反思》2017 年 4 月发表于苏州大学《中学数学月刊》杂志，文章基于作者对数学核心素养的认识和理解，以一道期末统考试题为例，分别从数学抽象、数学逻辑、数学建模等角度进行研究，并展示试题与课本习题的联系，以唤起人们对课本的重视，并能通过研究性学习进行教材资源整合研究。

文章《一道期中联考压轴题的评阅体会和讲评历程》（2016.4 发表于《数学通讯（教师刊）》）从一道期中压轴题的评阅感受入手，针对学生的不同思路在课堂上师生共同进行研究性学习，感受数学过程中的殊途同归之美。

他写的很多解题研究论文都放在新浪博客（园丁的平方）中，从广大师生参考，提高了课题研究的价值；这些素材也都被编写到苏州市田家炳高中的数学校本教材《数学思想与解题方法》中，便于学生更好地进行研究性学习。

在 2015 年苏州市区评优课比赛中，课题是《二倍角公式》，王耀博士构思精妙，让学生从等腰三角形中去发现信息，去研究本质，教学效果好，取得了市区一等奖的成绩。

另外，在 2015 年同课题组张超老师参加高中数学教师“命、解、评”比赛，善于从教材出发，发掘试题命制的出发点，探索命题规律，受到评委的肯定，最终获得比赛第一名。

在平时的教学中，为了提高学生自主探究的能力，王耀博士还在各种教研平

台上普及信息技术辅助软件——Geogebra 软件，可以在更好地展示动态问题本质，主要成果有文章《利用 geogebra 突破立体几何教学难点》发表于《中国多媒体网络教育学报》；还于 2017 年 8 月受邀对苏州市高二数学教师作暑期教师培训《信息技术与课堂融合案例分析》，收到一致好评。

张超老师在参与课题研究期间，从数学教育、教学、教研等多个层面进行研究性学习的研究，取得了丰硕的成果。

首先，他平时积极思考，勤于研究，发表多篇教研论文，例如：《弗兰德互动分析系统在数学课堂观察中的应用》2013 年 9 月发表于《中学数学月刊》。

《2014 年山东高考数学压轴试题的推广》2014 年 9 月发表于苏州大学《中学数学月刊》，文章基于作者对数学核心素养的认识和理解，以一道高考试题为例，进行研究，并展示试题与课本习题的联系，以唤起人们对课本的重视，并能通过研究性学习进行教材资源整合研究。

文章《一道江西省高考数学解析几何试题推广研究》2015.8 发表于《中学数学月刊》从一道高考试题入手，针对题目的本源，进行研究，分析，推广。

在 2015 年苏州市高中数学命题研究研讨活动中，开设讲座《高中数学命题的思考与探索》，结合苏州市高二期末统考试题的命制，分析高中数学命题的思路与探索，获得与会者的一致好评。

在 2016 年苏州市高中数学暑期命题培训中，开设讲座《高二数学应用题的命题设想与命题命制心路历程》，获得与会者的一致好评。

在 2016 年苏州市市区高中数学教改组活动，开设讲座《例谈解析几何变式教学》，分析解析几何变式教学的思路和体会，获得与会者的一致好评。

在 2017 年苏州市高三数学中心组一轮复习专题研讨活动中，开设讲座《新题型问题研究》，获得与会者的一致好评。

另外，在 2015 年同课题组王耀老师参加高中数学教师“命、解、评”团队比赛，善于从教材出发，发掘试题命制的出发点，探索命题规律，受到评委的肯定，最终获得比赛第一名。

何睦老师在参与课题研究期间，从课程和教研等方面进行了研究性学习的研究，也取得了丰硕的成果。

从教学层面来看，他积极开发和探索课程。自主开发了《数学哲学》、《数学方法论选讲》、《数学史选讲》等校本课程；带领学生开展研究性学习，已推荐 7 位学生在《数学通讯》（学生刊）、《中学生数学》、《新高考》等杂志发表研究性小论文 8 余篇；

从教研层面来看，他积极思考，善于反思。这几年，在各级各类国家级、省级期刊发表论文 27 篇，其中有 6 篇文章被中国人民大学报刊复印资料《高中数学教与学》全文转载，1 篇文章发表于 CSSCI 核心拓展期刊。

朱音老师在参与课题研究期间，在蔡玉书老师的带领下，在数学教育教学个方面深入学习，积极探索，取得了很大的进步。并将研究所得积极应用于教育教学之中，2017 年指导学生罗恒逸撰写论文《极线在解析几何中的应用》一文，并发表于 2017 年 6 月的《中学数学月刊》之上。平时经常向蔡老师学习解题，讲题方法，在 2014 年苏州市中小学教师把握学科能力竞赛（市区）中获高中数学组一等奖，大市三等奖。2013 苏州市区高中数学青年教师评优课，市区一等奖，大市二等奖。2011 年 10 月，论文《反思——从研究错题开始》发表于《中学数学月刊》2011 年第 10 期。论文《对新课程标准中自主学习的一点思考》发表与《新课程学习》2011 年第 4 期。在这个课题研究小组中，朱音老师是一个

学习者，虽然课题将要结束了，但是课题带给她的不断学习的快乐将会伴随她的一生。

杨欢涛老师在参与课题研究期间，从数学教育、教学、教研等多个层面进行研究性学习的研究取得了一些成绩。发表文章 6 篇：2014 年 11 月分表为《概率统计教学中体现的数学思想》发表于《高中数理化》，2016 年 12 月《函数对称性的类比推理与数理证明》发表于《高中数理化》，2016 年 6 月《初探高中数学课堂提问的有效策略》发表于《数学教学通讯》，2015 年 1 月《高中数学函数教学的几点关注》发表于《数学学习与研究》，2014 年 6 月《高中数学数列教学的特点分析》发表于《华夏教师》，2017 年 4 月《高中数学向量教学有效性探析》发表于《文理导航》。另外还于 2016 年 4 月开设公开课（青芒联盟公开课：《基本不等式的证明》），2015 年 4 月开设市叫改组公开课《存在性问题》受到一致好评。还参加了多次工作室组织的活动，取得了很多收获。

郭岚老师连续担任高三数学任课教师，任教班级成绩优异。指导多名学生获得全国高中数学联赛二等奖。多次开设市级公开课 在市基本功比赛中获得二等奖。《细节决定一切》在苏州市教育科学研究院训暨 2016 届高三优秀数学教师经验交流中获得好评

郝建中老师平时积极思考，善于研究学生的学情。从学生角度出发，帮助他们寻找合适的解题角度，比如在《数学通讯》（2016Z3 期）上的文章《权方和不等式及其应用》就是利用权方和不等式从合适角度切入题干，避免了大规模计算。在 2016 年苏州市“一师一优课”评课活动中，《柯西不等式》被评为市级优课。郝建中老师平时经常利用几何画板和 GGB 等教学软件，动态演示，降低了学生的思维难度。郝建中老师指导了多名同学参加数学竞赛，并获得市级奖项。

8．今后需要继续开展的工作

课题《高中数学研究性学习的实践与认识》的研究，取得了阶段性的成果，虽然申请结题，但是我们觉得，研究工作并没有结束。通过课题研究，我们有了一批骨干队伍，在总结的基础上，把我们目前存在的问题、取得的经验变成下一步开展研究工作资源。在“十三五”，我们打算继续开展此课题的研究，力争做深做细该课题，重点形成一批高质量有推广价值的科研成果。

伴随着课题研究与新课程实践的进一步开展，一些新的问题会逐步显现，成为每一位身处新课程实践一线的教师与教研人员必须面对的事实。课题组整理出其中一些较为普遍的、有研究价值的问题，希望在后续的研究中能够关注，并继续研究。

课题组 2018 年上半年争取将江苏省 2008 年到 2017 年 10 年高考试题的源、解、深、变，做一个深入研究，出版专著《江苏省 10 年数学高考试题研究》，蔡玉书老师打算在中国科学技术大学出版社出版竞赛系列读本《不等式竞赛读本》、《代数竞赛读本》、《平面几何重要定理和证明方法》等专著.

参考文献

1. 顾沛. 试论研究性教学中教师的作用. 数学教育学报，2006,15(3)；4－7
2. 张学润等. 研究性教学在高等数学教学中的实施浅析. 数学教育学报，2012,21(1)；85－87
3. 蔡玉书. 数学教学中加强研究性学习的思考与做法. 数学通报，2010,8
4. 蔡玉书. 高中数学研究性学习中的“理论型”研究课题的选取. 中学数学月刊 2012,12